令和4年度（令和4年4月入学）
博士前期課程（修士課程）一般入試（第Ⅰ期）
機械物理学専攻
機械設計学専攻

数　　　学　（90分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 配布物は，この問題冊子1部，解答用紙3枚と計算用紙1枚です。
3. **解答用紙には志望専攻名，受験番号を記入する欄がそれぞれ1箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計3枚）の志望専攻名欄と受験番号欄に志望専攻名と受験番号を記入しなさい。**
4. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。解答用紙，計算用紙の追加，交換はしません。**
5. **問題は全部で3問あり，2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。**
6. 問題冊子の白紙と余白は，計算などに使用してもよろしい。
7. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
8. 問題冊子と計算用紙は，持ち帰りなさい。

大学院入学試験問題 ［数学］ 2021.08

1 a, b を実数とし，4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ -2 & b & -10 & 2 \\ 1 & a & 5 & a \end{pmatrix}$$

により定める。A の階数は 2 であるとする。このとき，a, b の値を求めよ。また，$\mathbf{R}^4$ の一次変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$) の固有値 0 に属する固有ベクトルをすべて求めよ。

2 関数 $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ について以下の問に答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ を求めよ。

(2) 実数 x に対し，不等式 $1 - e^{-2x} \leqq 2x$ を示せ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が収束すること，および $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqq 4$ であることを示せ。

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束すること，および $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx \leqq 2$ であることを示せ。

3　a を正の実数とし，xy 平面の閉円板 $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ を考える。

(1)　次の重積分を求めよ。

$$\iint_D 4x^2y^2\,dxdy$$

(2)　xyz 空間内の開領域 $\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z > 0\}$ から XYZ 空間内の開領域 $\{(X,Y,Z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid Z > 0\}$ への写像

$$(X,Y,Z) = \Phi(x,y,z) = \left(2x + y - z,\, x - y + z,\, z^2\right)$$

を考える。ただし，Φ が上への 1 対 1 写像であることを証明せずに用いてよい。

(i) Φ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,z)} = \det \begin{pmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{pmatrix}$ を求めよ。

(ii) xyz 空間内の閉領域 $V = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ 1 \leqq z \leqq 2\}$ の Φ による像 $W = \Phi(V) = \{\Phi(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x,y,z) \in V\}$ の体積を求めよ。

（以上）

令和４年度　大学院工芸科学研究科博士前期課程（修士課程）

一般入試第Ⅰ期

入学試験学力検査問題

機械物理学専攻
機械設計学専攻

専門科目

注　意

（1）問題番号［1］～［8］の中から４問を選択すること。選択した問題番号を解答用紙左上の［　］に必ず記入し、その問題番号の解答を解答用紙に記入すること。

（2）解答用紙には、受験番号、問題番号と解答のみを記入すること。その他のことを記入してあるものは無効とする。

（3）解答を解答用紙裏面に書かないこと。

令和３年８月 19 日

［1］　長さ L，半径 a の丸棒について考える．以下の問に答えなさい．ただし，丸棒の材料の縦弾性係数を E，横弾性係数を G とする．

(1)　図 1 のように丸棒の左端を固定した状態で右端にねじりモーメント T を負荷する．丸棒に生じるせん断応力の最大値を求めなさい．

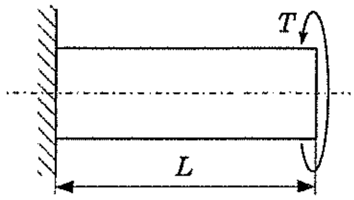


図1

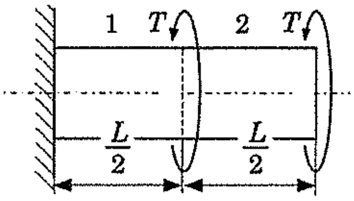


図2

次に図 2 のように丸棒を同じ長さの 2 つの領域に分けて考える．領域は左から領域 1 および領域 2 とする．

(2)　丸棒の左端を固定した状態で領域 1 と領域 2 の境界および領域 2 の右端にそれぞれ同じ向きにねじりモーメント T を負荷する．領域 1 および領域 2 に生じるねじれ角 φ_1 および φ_2 をそれぞれ求めなさい．

(3)　問(2)の状態を保ったまま丸棒の右端を固定して，負荷していたねじりモーメントを除荷した．丸棒に生じるせん断ひずみの最大値を求めなさい．

(4)　図 3 のように，領域 1 と領域 2 の境界に左向きの荷重 P を，領域 2 の右端に右向きの荷重 $2P$ を負荷した．領域 1 および領域 2 に生じる応力 σ_1 および σ_2 をそれぞれ求めなさい．

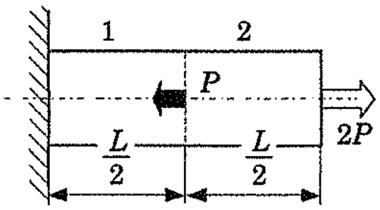


図3

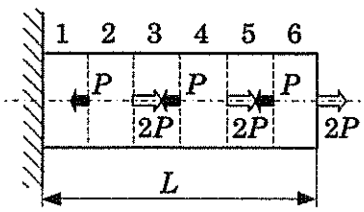


図4

さらに今度は図 4 のように丸棒を同じ長さの 6 つの領域にわけて，先ほどと同様に左から順に領域 1～領域 6 とする．領域 1 と領域 2，領域 3 と領域 4，領域 5 と領域 6 のそれぞれの境界に左向きの荷重 P を，領域 2 と領域 3，領域 4 と領域 5 のそれぞれの境界および領域 6 の右端に右向きの荷重 $2P$ を負荷した．

(5)　領域 3 の伸びを求めなさい．

(6)　図 4 の状態で丸棒の右端を固定して，負荷していた荷重を除荷した．丸棒に生じる応力を求めなさい．

［2］ 両端に剛体板を接着して閉鎖した内半径 R，肉厚 t（$t \ll R$）の薄肉円筒について以下の問いに答えなさい．ただし，剛体板による円筒の x-y 面内の変形拘束はなく，座屈も生じないものとする．モールの応力円の描画に際しては，円筒の外表面に取った微小要素に生じる応力に対する応力円を描き，その中心，半径，主応力の値を明記しなければならない．なお，円筒の材料は等方性材料でその縦弾性係数を E，剛性率を $G=3E/8$ とする．

図1に示すように，剛体板に荷重 P を負荷したとき，以下の小問に答えなさい．

(1) モールの応力円を描き，応力円上における z 面と θ 面の位置も示しなさい．

(2) θ 面より時計回りに 30° 回転した面に生じる応力を求めなさい．

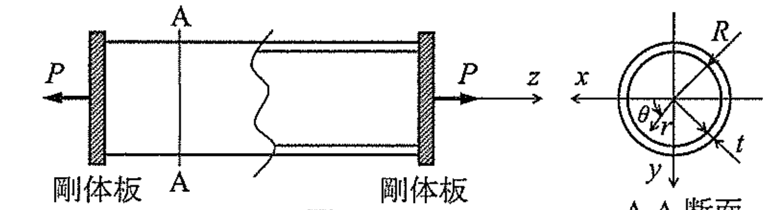


図 1

図 2 に示すように，内圧 p を負荷し，剛体板の z 方向の移動を拘束したとき，以下の小問に答えなさい．

(3) この円筒に生じる応力を求めなさい．

(4) モールの応力円を描き，応力円上における z 面と θ 面の位置も示しなさい．

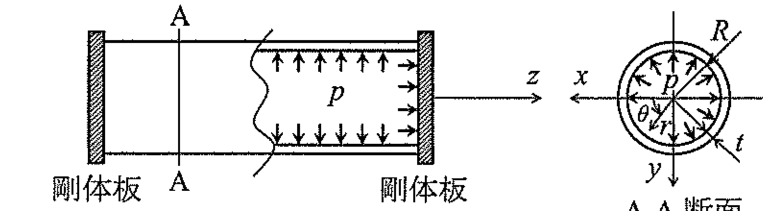


図 2

図 3 に示すように，剛体板に荷重 P とトルク $T=PR$ を負荷したとき，以下の小問に答えなさい．

(5) この円筒の断面二次極モーメントを求め，トルク $T=PR$ によって円筒の z 面に生じるせん断応力を求めなさい．

(6) モールの応力円を描き，応力円上における z 面と θ 面の位置と応力の値も示しなさい．

(7) 最大主応力が生じる主面の法線と z 軸とのなす角度を求めなさい．

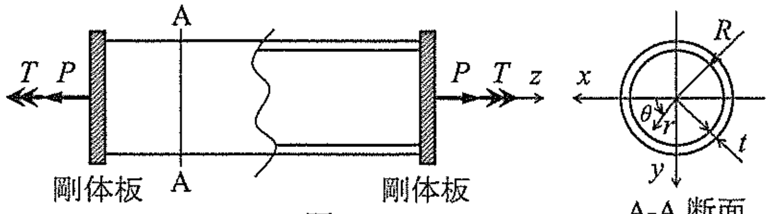


図 3

[3]　下図に示す，質量 M の台車がばね定数 k のばねおよび減衰係数 c のダッシュポットでつながれており，その右側にスロープがあるような装置を考える．ある時刻に，スロープの高さ h の位置から初速度 0 で質量 m の質点を落下させるものとし，台車の変位を $x(t)$，質点が静止している台車と衝突する時刻を $t=0$ とし，そのときの台車の位置を原点，ばねは自然長をとるものとする．質点と台車は衝突すると結合され，その後分離することはない．この系に関して，以下の問いに答えなさい．ただし，x は右向きを正とし，重力加速度は g で書き表すものとする．また，質点および台車に作用する摩擦力は無視できるものとする．

(1) 質点が台車に衝突する直前の速度 v を求めなさい．

(2) 質点と台車が結合した結合質量体の $t=0$ における速度 $\dot{x}(0)$ を求めなさい．

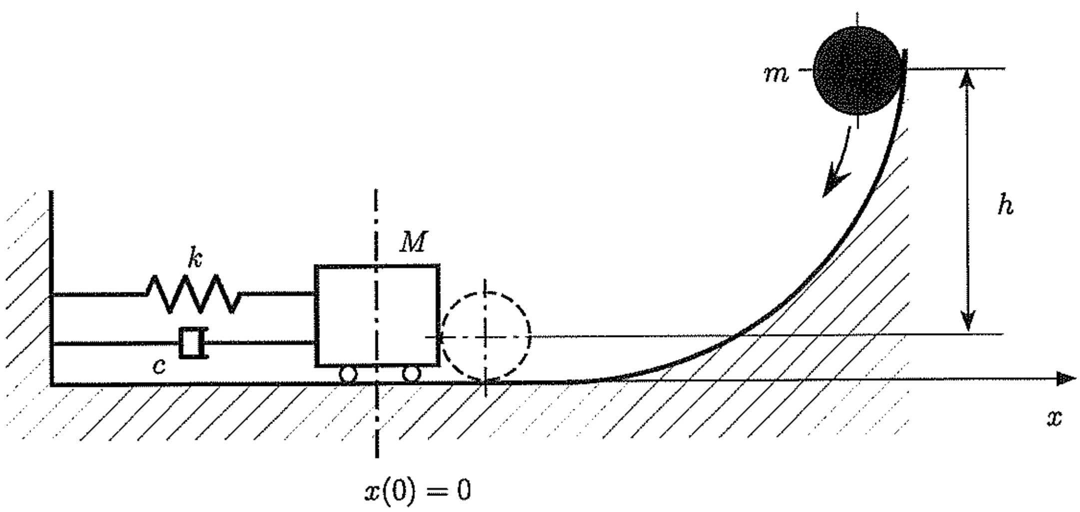
(3) 結合質量体の変位は台車の変位と同一であるため，$x(t)$ を結合質量体の変位であるとしたとき，$x(t)$ に関する運動方程式を導き，その減衰比 ζ および固有角周波数 ω_n を求めなさい．

(4) 減衰比が $0<\zeta<1$ である場合の結合質量体の変位 $x(t)$ を求めなさい．

(5) この系を，質点の衝突を受け止める衝撃緩衝装置として使用するため，減衰比を $\zeta=1$ と設定した．このときの減衰係数を求めなさい．

(6) $\zeta=1$ のときの結合質量体の変位 $x(t)$ を求めなさい．

(7) $\zeta=1$ とした場合の，結合質量体の最大変位 x_m と最大変位を示す時刻 t_1 を求め，このときの $x(t)$ の波形概形を描き，そこへ x_m および t_1 を記入しなさい．



［4］ 下図は，4輪自動車の1/2車両モデルと呼ばれるものである．これは，車両を真横から，車軸を法線とする平面に投影した2次元モデルであり，車体の上下運動と面内の回転運動（ピッチ回転運動）のみを考えたものである．車体の質量を m，重心G周りの慣性モーメントを J とする．前後の車輪はサスペンションおよびタイヤの剛性と減衰を表すばねとダッシュポットで表現する．図に示すように，前輪においては，ばね定数 k_1 のばねと減衰係数 c_1 のダッシュポットの上端 P_1 が，車体重心から距離 L_1 の位置において車体に固定され，下端 Q_1 が路面に接地している．同様に後輪においては，ばね定数 k_2 のばねと減衰係数 c_2 のダッシュポットの上端 P_2 が，車体重心から距離 L_2 の位置において車体に固定され，下端 Q_2 が路面に接地している．点 P_1, G, P_2 は一直線上にあるとする．

路面との接地点 Q_1, Q_2 が同じ基準高さにあるときの平衡状態において線分 P_1P_2 は水平であるとし，時間を t，平衡状態からの車体重心Gの鉛直上向き方向微小変位を $x(t)$，車体の反時計回り微小回転角を $\theta(t)$ とし，車輪の駆動トルクの影響は無視できるとして以下の問いに答えなさい．

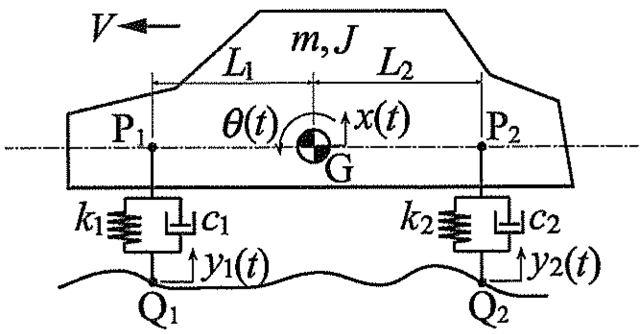
(1) 自動車が走行している状況を考える．このとき，路面の起伏により接地点 Q_1, Q_2 の高さは基準高さから上下する．接地点 Q_1, Q_2 の鉛直上向き方向微小変位をそれぞれ $y_1(t)$, $y_2(t)$ と表すとして，車体重心の上下運動に関する運動方程式を書きなさい．

(2) 問(1)と同じ状況における車体の回転運動に関する運動方程式を書きなさい．

(3) 路面が振幅 a，波長 λ の正弦波形状をしているとする．この上を一定速度 V でこのモデルが走行するとき，$y_1(t)$ および $y_2(t)$ を時間関数として具体的に表現しなさい．なお，問題文中に与えられていない情報は適当に定めてよい．

(4) 車体の上下運動と回転運動が互いに独立になるための条件を求めなさい．

(5) 問(4)の条件下で，このモデルが問(3)で考えた路面上を速度 V で走行し，車体が定常応答を呈するとき，車体重心の上下運動 $x(t)$ の振幅を表す式を求めなさい．



［5］　断熱された理想的な復水器を考える（下図参照）．復水器には高温の湿り蒸気が乾き度 x の状態で流入し，低温の水によって冷やされた後，飽和液として流出する．図中・表中の記号は，$\dot{m}$：質量流量，T：温度，P：圧力，U：速度，v：比容積，h：比エンタルピー，s：比エントロピー，A：冷却円管断面積である．また，添え字は，1：冷却円管入口①，2：冷却円管出口②，3：復水器入口③，4：復水器出口④，g：飽和蒸気，f：飽和液である．湿り蒸気と飽和液の圧力が等しいとき，図中・表中の記号および C_p（水の定圧比熱）を用い，以下の問いに答えなさい．なお，湿り蒸気および水ともに定常的に流入し，流入・流出時の運動エネルギーの変化およびポテンシャルエネルギーの変化は無視できるものとする．また，C_p は温度に依存せず一定であるとする．

(1) 冷却円管入口の水の体積流量 $\dot{Q}_1$ を求めなさい．

(2) 冷却円管入口の水の比容積 v_1 を求めなさい．

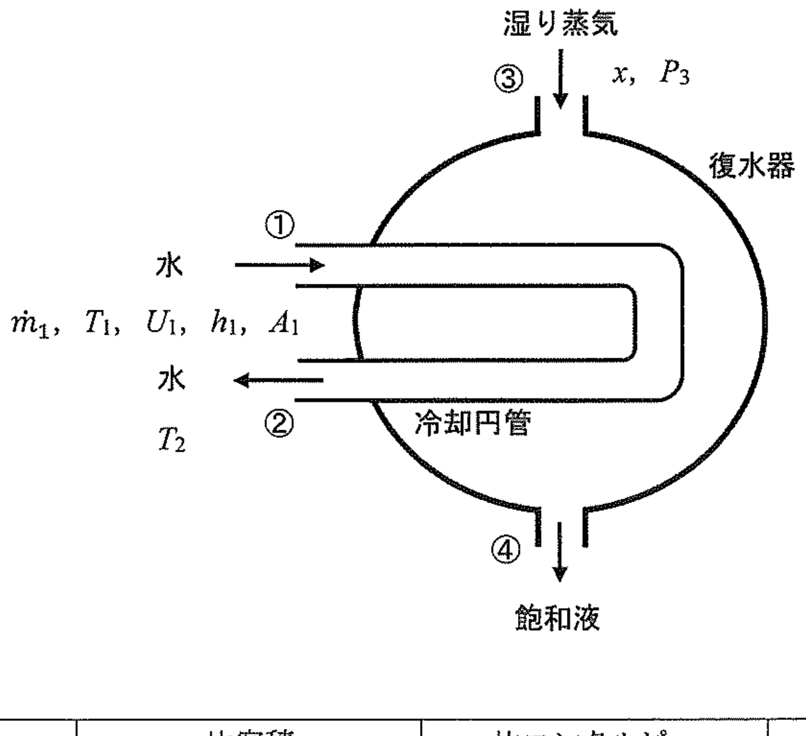
(3) 冷却円管出口の水の比エンタルピー h_2 を求めなさい．

(4) 冷却円管入口から出口までの水の比エントロピーの変化 Δs（$=s_2-s_1$）を求めなさい．

(5) 復水器出口の飽和液の比内部エネルギー u_4 を求めなさい．

(6) 復水器入口の湿り蒸気の質量流量 $\dot{m}_3$ を求めなさい．

(7) この過程における単位時間当たりのエントロピー生成 $\dot{S}_{gen}$ を求めなさい．



圧力	比容積		比エンタルピー		比エントロピー	
	飽和液	飽和蒸気	飽和液	飽和蒸気	飽和液	飽和蒸気
P_3	v_f	v_g	h_f	h_g	s_f	s_g

［6］　単位質量の空気を作動流体とする空気標準のブレイトンサイクルがある．サイクルの最低温度 T_L と最高温度 T_H はともに一定値である．このサイクルについて，以下の問いに答えなさい．ただし，空気の比熱比は κ，気体定数は R とする．

(1) サイクルの圧縮過程において，空気の圧力 p と温度 T の間には以下の関係が成り立つ．

$$p^{1-\kappa}T^{\kappa}=一定$$

熱力学第一法則から出発して，この関係式が成り立つことを示しなさい．

(2) 圧縮後の空気の温度を T_2 で表すとき，サイクルの圧力比を T_2，T_L，κ を用いて表しなさい．

(3) 膨張後の空気の温度を T_2，T_L，T_H を用いて表しなさい．

(4) 正味の出力仕事を T_2，T_L，T_H，κ，R を用いて表しなさい．

(5) T_2 を変数として T_L から T_H まで変化させたとき，T_2 と正味の出力仕事の関係をグラフに表しなさい．ただし，グラフは横軸を T_2，縦軸を正味の出力仕事とする座標平面上に図示すること．

(6) 正味の出力仕事が最大になるとき，圧縮後の空気の温度 $T_{2,max}$ を T_L と T_H を用いて表しなさい．

(7) 問(6)のとき，サイクルの熱効率を T_L と T_H を用いて表しなさい．

(8) 問(6)のとき，サイクルに再生器を付加して熱効率を高めることができるか否か，理由とともに答えなさい．

［7］　図1に示すように，仕切り板によって2つの領域に分割されている水槽があり，その左側をタンク1，右側をタンク2とする．また，仕切り板には底面から高さ h_0 の位置に断面積 A_0 の孔を有しており，タンク1の開口面積を A_1，タンク2の開口面積を A_2 とする．いま，タンク1の水面は孔から h_1 の高さにあり，孔からタンク2に向かって水平方向に流速 u_0 にて水が放出されている．放出された水は孔から水平方向に x_2，垂直方向に h_2 落下した地点に着水している．図1の状態から一定時間経過後，タンク2の水面が孔の位置より高くなり，図2に示す状態となった．この時，以下の問いに答えなさい．ただし，重力の加速度を g とし，孔を通過する際の流体のエネルギー損失は無視する．また，孔から放出された水は空気抵抗を受けないものとし，A_0 は A_1 および A_2 と比較して十分小さいものであるとする．

(1) 図1の状態において，タンク1の水面の降下速度を u_1 とすると，u_1 を A_0，A_1 および h_1 を用いて表しなさい．

(2) 図1の状態において，孔から着水地点までの水平方向距離 x_2 を u_0 および h_2 を用いて表しなさい．

(3) タンク2が空の状態から，タンク2の水面が孔の高さに達するまでの時間 T_1 を A_0，A_1，A_2 および h_0 を用いて表しなさい．

(4) 図2の状態において，孔からの水面高さは，タンク1が h_3，タンク2が h_4 である．この時に孔を通過する流速 u_5 を h_3 および h_4 を用いて表しなさい．

(5) 図2の状態から，両タンクの水面高さが等しくなるまでの時間 T_2 を A_0, A_1, A_2, h_3 および h_4 を用いて表しなさい．

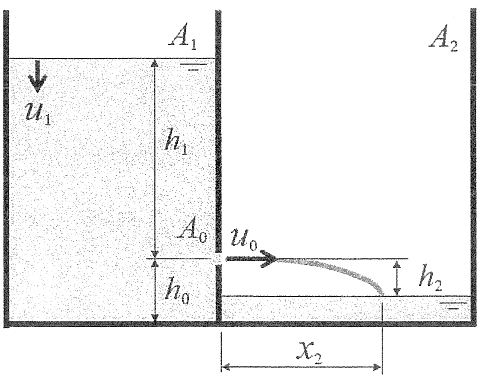


図1

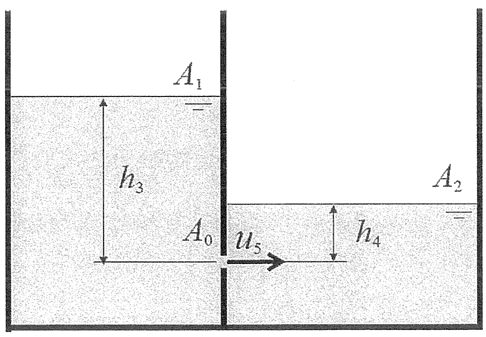


図2

［8］　非圧縮性流体の2次元定常流れとしてクエット流を考える．流体の密度 ρ と粘性係数 μ は一定として，以下の問いに答えなさい．

最初に，図1のような圧力勾配がない平板間のクエット流を考える．下の平板に沿って流れ方向に x 軸を，それに垂直上向きに y 軸をとり，上の平板の座標を $y=h$ とする．下の平板は静止し，上の平板は x 軸の正の方向に速度 U で移動している．

(1) この流れの x 方向速度分布 $u(y)$ を求めなさい．

(2) 上の平板が流体から受けるせん断応力の大きさと向き（ x 軸の正または負）を答えなさい．

次に，図2のように，半径 R_1 の内円筒が角速度 ω_1 ，半径 R_2 の外円筒が角速度 ω_2 で回転している同心二重円筒間のクエット流を考える．円筒中心から外向き半径方向に r 軸，反時計回り周方向に θ 軸をとり，速度の半径方向成分を u_r ，周方向成分を u_θ とし，p を圧力，t を時間とすると，平面極座標系での連続の式および運動方程式は，以下のように与えられる．

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$$

(3) $\omega_1=\omega_2=\omega$ のとき，周方向速度成分 $u_\theta(r)$ を導出しなさい．

(4) (3)の流れで内円筒表面での流体の圧力を p_1 ，外円筒表面での流体の圧力を p_2 とするとき，圧力差 p_2-p_1 を求めなさい．

(5) $\omega_1\neq\omega_2$ のとき，周方向速度成分 $u_\theta(r)$ を導出しなさい．

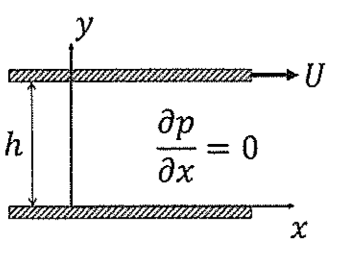


図1

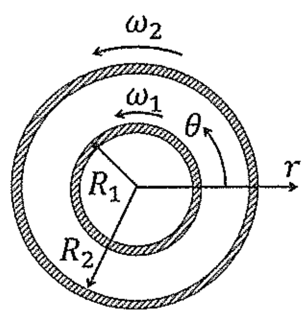


図2