

物 理 学 (90分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、この問題用紙と解答用紙を開いてはいけません。
2. 問題は、表紙と白紙に続く5ページからなっています。また、解答用紙は3枚、下書用紙は1枚あります。監督者から解答開始の合図があったら、問題用紙、解答用紙、下書用紙を確認し、落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答用紙には、受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計3枚）の受験番号欄（合計6箇所）に受験番号を必ず記入しなさい。
4. この問題用紙の白紙と余白は、適宜下書きに使用してよろしい。
5. 解答は、必ず解答用紙の指定された場所（問題番号や設問の番号・記号などが対応する解答欄の中）に記入しなさい。なお、指定された場所以外や、裏面への解答は採点対象外です。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. この問題用紙と下書用紙は、持ち帰りなさい。

I

半径 R で一様な質量密度 ρ の球状の惑星 Q を考える。図に示すように、惑星 Q には中心 O を通るまっすぐな細い穴があり、この穴に沿って点 O を原点とする x 軸をとる。穴の占める体積は惑星の体積に比べて無視することができる。惑星 Q に大気はなく、自転していないものとする。簡単のため、力や加速度は x 方向のみを考え、 x 軸正の方向を向くときに正の符号を持つスカラーで表す。万有引力定数を G とし、位置エネルギーの基準を無限遠として、以下の問いに答えよ。

(a) 惑星 Q の質量を求めよ。

以下では、質量 m の質点 A が x 軸上を動く場合を考える。

(b) 質点 A が位置 x ($x > R$) にある場合に、質点に働く力 F を求めよ。また、位置エネルギーを示せ。

(c) 質点 A が位置 x ($0 < x < R$) にある場合に、質点に働く力 F を求めよ。また、位置エネルギーを示せ。

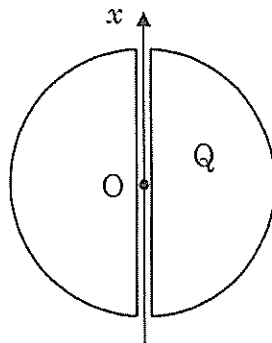
(d) F を x ($-\infty < x < \infty$) の関数としてグラフに表せ。

次に、時刻 $t = 0$ において質点 A を惑星 Q の表面 ($x = R$) から静かに穴に落とした場合を考える。

(e) 位置 x ($|x| < R$) での質点 A の加速度を示せ。

(f) この時、質点 A はどのような運動をするか。理由とともに簡単に述べよ。

(g) 質点 A が惑星表面から点 O に最初に到達するまでの時間と、点 O における速さを求めよ。



図

II

2つの点電荷 $+q$ と $-q$ ($q > 0$) を微小距離 l だけ離しておいたとき、この点電荷の対を電気双極子という。また点電荷 $-q$ から点電荷 $+q$ に向かう大きさ l のベクトルを l とするとき、 $p = ql$ を電気双極子モーメントという。電位の基準を無限遠とし、真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問(a)～(h)に答えよ。

(1) 図1のように、真空中で一様な外部静電場 E_0 の中に電気双極子がおかれている。静電場 E_0 の方向と電気双極子モーメント p の方向のなす角を θ とする。

(a) 点電荷 $+q$ が静電場 E_0 から受ける力 F を示せ。

(b) 電気双極子が静電場 E_0 から受ける力とその力による運動を簡潔に説明せよ。

(c) 外部静電場 E_0 中にある電気双極子の位置エネルギー U を示せ。

(2) 図2のように、真空中に電気双極子モーメント p の電気双極子がおかれている。点電荷 $+q$ の位置を A、点電荷 $-q$ の位置を B、AB 間の距離を l 、AB の中点を O とする。 p と θ の角度をなし、O から r の距離にある位置を P とする。 r は O から P へ向かうベクトルである。O を原点とし p の方向を $\theta = 0$ とする極座標系を考えて、電気双極子が遠方 ($r \gg l$) の位置 P に作る電位および電場を求めよう。

(d) 点電荷 $+q$ が位置 P に作る電位 ϕ_A を、AP 間の距離 r_A を用いて示せ。

(e) 電気双極子が位置 P に作る電位 ϕ はいくらか。AP 間の距離 r_A と BP 間の距離 r_B を用いて示せ。

(f) 前問(e)の結果 ϕ を、 r_A 、 r_B を用いずに p 、 r を用いて示せ。 $(r_A$ と r_B を余弦定理を用いて r 、 l 、 θ で表し、 $|x| \ll 1$ に対して $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x$ とする近似を利用せよ。)

(g) 極座標系 (r, θ, φ) における基本単位ベクトル e_r, e_θ, e_φ を図2のように定める。電気双極子が位置 P に作る電場 E の、 e_r 方向成分 E_r 、 e_θ 方向成分 E_θ 、 e_φ 方向成分 E_φ をそれぞれ示せ。(図2に示す極座標系において、スカラー場 f の勾配は $\text{grad } f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi$ で与えられる。)

(h) OP 間の距離 r が一定値である球面上において、電場の大きさ $|E|$ が最小になる θ とそのときの電場 E (電場の大きさではないことに注意) を示せ。

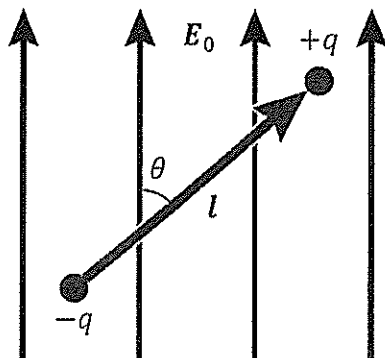


図 1

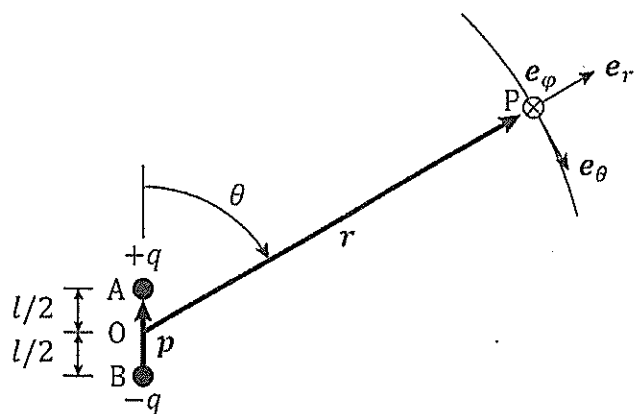


図 2

Ⅲ

図のように、断熱材でできたピストン・シリンダー装置の中に、単原子分子からなる n [mol] の理想気体が封入されている。シリンダーは鉛直に置かれており、その内部には気体を加熱するためのヒーターが取り付けられている。また、シリンダーの内壁には、底から高さ L [m] の位置にストッパーが付いている。質量 M [kg]、断面積 S [m²] のピストンは、ばね定数 k [N/m] のばねでシリンダーの底と連結されており、ストッパーの上側を滑らかに動くことができる。大気圧を p_0 [Pa]、重力加速度の大きさを g [m/s²]、気体定数を R [J/(mol·K)] とし、以下の問いに答えよ。ただし、ヒーターとストッパーの体積、ばねの質量と体積は無視できるものとする。

初め、ピストンはストッパーに接しており、ばねの長さは自然長であった。このとき、シリンダー内の気体の圧力は大気圧と同じであり、この状態を状態 1 とする。

(a) 状態 1 の気体の温度 [K] を求めよ。

次に、ヒーターを用いてシリンダー内の気体をゆっくりと加熱したところ、ピストンは上に動き始めた。ピストンが動き始める瞬間の状態を状態 2 とする。

(b) 状態 2 の気体の圧力 [Pa] と温度 [K] を求めよ。

状態 2 の後、ゆっくりと加熱を続けるとピストンは上昇し、シリンダーの底からピストン下面までの高さが $\frac{3}{2}L$ [m] になったところで加熱を止めた。このときを状態 3 とする。

(c) 状態 3 の気体の圧力 [Pa] と温度 [K] を求めよ。

(d) 状態 1 から状態 3 まで変化する間に、気体が行った仕事 [J] を求めよ。

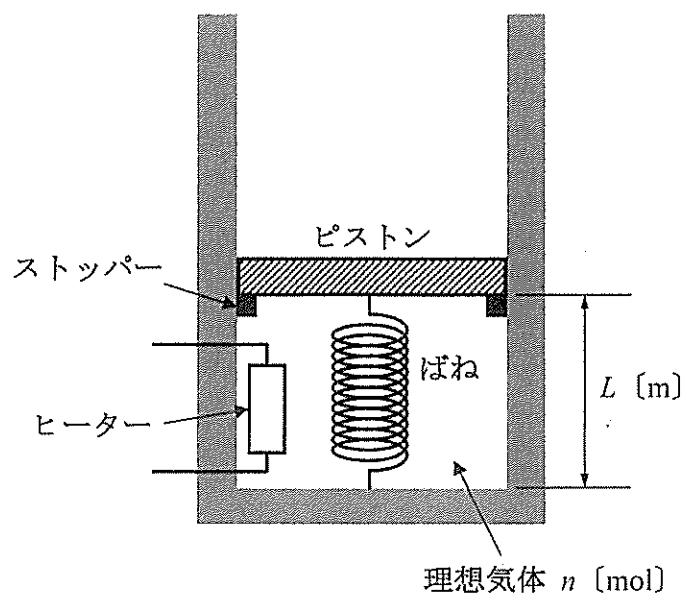
(e) 状態 1 から状態 3 まで変化する間の、気体の内部エネルギー変化 [J] を求めよ。

(f) 状態 1 から状態 3 まで変化する間に、気体に加えられた熱量 [J] を求めよ。

状態 3 の後、ピストンの上におもりを少しずつのせていったところ、ピストンはゆっくりと下に移動し、最初の位置に戻った。このときを状態 4 とする。

(g) 状態4のとき、ピストンの上についているおもりの全質量 [kg] を求めよ。

ただし、 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = 2$ として計算せよ。



図

(以上)